数学科学習指導案

大分県立大分舞鶴高等学校

日　時	令和元年 10 月 21 日（月）5 限	場　所	1 年 8 組教室
対　象	普通科　1 年 8 組 α グレード　29 名 （男子 23 名，女子 6 名）	教科書	改訂版　数学Ⅰ　（数研出版）
科　目	数学Ⅰ	指導者	瓜生田　浩司

1．はじめに

母校でもある本校に赴任して 4 年目を迎えた。研究授業を行う機会あるいは県内外の研究授業を拝見する機会にも恵まれ，日々考えさせられることばかりである。昨年度まで 3 年間持ち上がった生徒と関わりながら，あらためて生徒に付けさせたい力とは何かと自問自答し続けた。現時点での答えは「諸問題に対して，解決のために粘り強く問題と向き合う心の体力」と「（解決前はもちろんのこと）解決後にも生徒が疑問を持ち続け，過程を振り返ったり，設定を変えてみたり，他の分野や既習内容と統合して体系化できないかと模索し続ける頭の体力」だと考えている。それを生徒が身につけてくれたら数学科教員として最高の喜びだと思うが，一朝一夕にそうはうまくいかないことも日々痛感している。だが，せめてまずは自分だけでもそのあるべき姿で授業に臨みたいと考えている。やはり「重要度の高い問題を入試までに何問扱えるか」ではなく，「その問題とどう向き合うか，この問題から何を感じとるか」を伝えたい。

2．単元名

数学Ⅰ　第 4 章　図形と計量　　第 2 節　「三角比への応用」（13 単位）
教科書：『改訂版　数学Ⅰ』数研出版／副教材：『改訂版　4STEP　数学Ⅰ+A』数研出版

3．指導の立場

（1）教材観

図形と計量において小学校第 5 学年では，三角形の決定条件を確認した。さらに中学校第 2 学年では三角形の合同について論証する力を，第 3 学年では相似な図形の性質を活用する力や，三平方の定理を具体的な場面で活用する力などを養っている。本単元では，角 θ の三角比を導入したことにより，既習内容では名前を与えることができなかった線分の長さや角の大きさに名前をつける（≒求める）ことができるようになり，平面図形および空間図形のさまざまな計量が可能になった。これまでの幾何分野の問題は補助線を引くなどのひらめきを必要としたのに対し，三角比を用いることで，そこに苦手意識を持つ生徒でも計算による克服が可能になった。また，本単元について平成 30 年度告示高等学校学習指導要領解説数学編に以下のように記されている。

『導いた正弦定理や余弦定理を用いて具体的な三角形の辺の長さや角の大きさを求めることができるようにする。これらの活動を通して，余弦定理が三平方の定理を一般の三角形に拡張したものであることや，正弦定理や余弦定理の有用性を認識できるようにする。（中略）見出した関係を図形に表し数学的な考察を通して得られた結果をもとの事象に基づいて解釈したりすることにより，三角比や正弦定理，余弦定理などを日常の事象や社会の事象などの問題の解決に活用する力を培う。』（文部科学省，2018，P40）

本時では、前時（第 5 時）に扱う三角形の決定問題において，1 つに定まる三角形と 2 つの候補が考えられる三角形との違い，さらに同じ位置関係の条件設定でも決定に差が生じる点に焦点を当てて，その疑問を深く考察しようとするものである。正弦定理や余弦定理を図形の計量のための単なる道具として活用するだけでなく，図形的な意味や定理どうしのつながり，他の単元で学んだ内容の意味付けを重視させたい。

（2）生徒観

本校は数学の授業において，習熟度別授業を２クラス３解体で実施している。８組αグレードは推薦Ａ（理数科）入試で合格した生徒５名を含む，比較的数学に関心の強い生徒が多く在籍している。まずは自分で何とかしたいという意思が十分に伝わってくる生徒も多いので，本時の自力解決と集団検討の時間配分については弾力的に進めていきたい。多面的に考え，粘り強く問題の発見や解決に取り組む態度や数学的な表現を用いた説明を理解したり評価したりする力は良好であるが，得られた結果を元の事象に戻してその意味を考える力や，過程や結果を吟味し，評価や改善につなげる態度の醸成には十分な時間が取れておらず，まだ課題が残ると考える。本時はここをねらいとして展開する。

（3）指導観

単元観でも述べたように，三角比を導入することで，幾何の問題を（経験に基づく）ひらめきに頼らない解答が可能になった。その一方で，三角比に纏わる種々の定理をタイミング良く活用するための見通す力と計算処理能力を求められることになった。前時において，まずはしっかりと三角形の決定問題が解ける状況を目指した。ねらいとしている，問題が解決した後も本質を見抜くための過程の振り返りを続けるためには，まずはしっかりとその問題を解決しておくことが重要だと考えるからである。その上で，解決した後に「確かに２パターンの三角形が考えられるな」という図形的な考察のみで終わらず，三角形の決定条件や解の配置問題とつながる部分にこそ，深く学ぶチャンスが眠っているのではないかという思いを根幹として，展開していきたい。

個人考察および集団検討においては，まずは個人でできる限り考えさせたい。三角形の決定条件（合同条件）につなげて考察できる生徒は早い段階で出てくると考えられるが，さらに踏み込んで，余弦定理を２次方程式と見て，正の解を持つ条件に持ち込むことはかなり高度な思考力が必要であるため，生徒に発表させるタイミングと発問には十分注意し，それに類する考えを持つ生徒が出てくれればその生徒を軸に展開していきたい。

3．単元の目標と評価規準

（1）単元の目標

- 正弦定理および余弦定理について既習事項と関連付けて理解し，それらを活用して辺の長さや角の大きさなどを求めることができる。　（知識・理解）（数学的な技能）
- 図形の構成要素間の関係を，三角比を用いて表現するとともに定理や公式として導くことができる。　（数学的な見方や考え方）
- 日常の事象や社会の事象などを数学的に捉えて問題を解決するだけで満足せず，解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察しようとしている。　（関心・意欲・態度）

（2）単元の評価規準

観点／評価	ア 関心・意欲・態度	イ 数学的な見方や考え方	ウ 数学的な技能	エ 知識・理解
学習活動に即した具体的な評価規準	ⅰ．過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察しようとしている。 ⅱ．図形の構成要素間の関係に着目し，日常の事象などを数学的に捉えようとしている。	ⅰ．図形の構成要素間の関係を三角比を用いて表現し，考察することで定理として導くことができる。 ⅱ．解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察することができる。	ⅰ．定理や公式を活用して，辺の長さや角の大きさなどを求めることができる。	ⅰ．正弦定理および余弦定理について，三角形の決定条件や三平方の定理と関連付けて理解する。

5. 単元指導と評価の計画

時	ねらい	学習内容・学習活動	評価規準（方法）
1	正弦定理について考察しようとしている。（関・意・態） また，これを活用してさまざまな値を求めることができる。（技）	△ABC において，1 辺の長さと 2 つの角の大きさが与えられたとき，他の 1 辺の長さを求めることをテーマとし，正弦定理を証明した上で活用する。また，正弦定理について，アメリカの教科書の証明法や明治時代の説明法も紹介する。	授業観察 発問への反応 宿題
2	余弦定理について考察しようとしている。（関・意・態） また，これを活用してさまざまな値を求めることができる。（技）	△ABC において，2 辺と 1 つの角から残りの辺を求めることをテーマとする。前時の正弦定理では求められないことを確認した上で，余弦定理を証明し，テーマの解決を図る。さらに 3 辺の長さから 1 つの角の大きさを求める問題なども扱う。	授業観察 発問への反応 宿題
3	正弦定理と余弦定理を活用する局面について整理し，これらがつながっていることを考察することができる。（見方や考え方）	正弦定理と余弦定理についてどのような条件設定のときに有効に活用できたかを各自で振り返り，整理する。また，第 1 余弦定理を導出し，第 1 余弦定理を介して第 2 余弦定理から正弦定理を導く。	授業観察 発問への反応 振り返りの記述
4	三角形の角の大小と辺の長短の関係について積極的に考察しようとしている。（関・意・態）	三角形の最大角が鈍角, 直角, 鋭角のいずれかになるかについて考察する。さらに数学 A 第 2 章「図形の性質」で学んだ三角形の角の大きさと辺の長さの関係を確認し，これを前時までの内容を用いて証明する。また，第 6 時の課題解決のための重要な鍵を握る $\sin B \leq \frac{b}{c}$ を補題として示す。	小テスト 授業観察 発問への反応
5	正弦定理や余弦定理を用いて，三角形の辺の長さや角の大きさを求めることができる。（技） また，過程の多様性が考えられる問題について，比較検討し，考察しようとしている。（関・意・態）	ある辺の長さや角の大きさが与えられた三角形について，残りの辺の長さや角の大きさを求める。その際に 1 通りに定まる三角形や決定までに吟味が必要な三角形などを扱う。生徒によって過程の多様性が予想される問題については，グループでの比較検討によって，それぞれの過程の効果的な点および留意したい点について考察する。	授業観察 発問への反応 グループでの議論の様子 振り返りの記述
6	前時で感じた疑問や興味深い点について解決しようとする。（関・意・態） また，三角形の決定条件や正の実数解を持つ条件などと結び付けて考察することができる。（見方や考え方）	第 5 時で求めたさまざまな条件における三角形の辺と角の決定問題において，生じた違いの原因について意見を出し合い，その解決をテーマとする。1 つに定まる三角形と 2 つの候補が考えられる三角形との違いを既習内容に結び付けて，図形的な考察や数式的な推論を通して考察する。	授業観察 発問への反応 グループでの議論の様子 振り返りの記述

7	正弦定理を用いて，三角形の特定の角を求めることができる。（技）	正弦定理を利用して，三角形の辺や角の間に成り立つ関係式を確認する。それを利用して，三角形の特定の角（の正弦や余弦）を求める。その際，第 4 時で学んだ辺の長さと角の大きさの大小関係について振り返りながら求める。	授業観察 発問への反応 ノートの記述
8	正弦定理や余弦定理を活用して三角形の形状について考察することができる。（見方や考え方）	三角形の辺や角の間に成り立つ等式からその三角形の形状を考察することをテーマとする。特徴のある三角形について挙げ，それらを示すためには辺の長さについて整理すればよいことに着目した上で考察する。	授業観察 発問への反応 振り返りの記述
9	三角比を用いて三角形の面積を求めることができる。（技） また，面積を用いて，線分の長さを考察することができる。（見方や考え方）	三角比を用いて三角形の面積を求めることをテーマとする。小学校から用いている三角形の面積公式をもとに導く。また，角の二等分線の長さを求める際に，余弦定理を用いて力業で求める方針と 2 つの三角形の面積に分割することで求める方針とを比較検討して考察する。	授業観察 発問への反応 ノートの記述
10	多角形の面積や対角線の長さを求めるために適当な三角形に分割して考察することができる。（見方や考え方）	多角形の辺や対角線の長さおよび面積を求めるために，円に内接する四角形について，2 つの三角形に分割して考察する。与えられた条件に応じて解答の進め方が変化するので，見通しを持ちながら求める。	授業観察 発問への反応 グループでの議論の様子 ノートの記述
11	内接円と面積についての関係を考察することで，内接円と外接円の関係を考察することができる。（見方や考え方）	外接円と内接円の関係を調査することをテーマとする。まず，三角形を分割することで三角形の内接円と面積の関係を考察する。さらに正弦定理と面積公式を用いて外接円と面積の関係を考察する。それらを統合して外接円と内接円の関係まで発展させて考察する。	授業観察 発問への反応 ノートの記述 振り返りの記述
12 13	空間図形の計量に正弦定理や余弦定理を活用しようとする。（関・意・態） また、身近な事象を図に表し、三角比を用いて考察することができる。（見方や考え方）	正弦定理および余弦定理を空間図形の計量に用いることをテーマとする。測量や空間図形への活用において，適当な三角形に着目して考察する。身近に長さや角を図ってみたい事象があるか考えて，それを調べるためのモデル図を各自が作図し，考察する。	授業観察 発問への反応 振り返りの記述 テーマ設定

6. 本時案

（1）教材名：三角形の辺と角の決定問題における考察

（2）本時の目標

・三角形の決定問題において，1 つに定まる三角形と 2 つの候補が考えられる三角形との違いについて，関心を持って解決しようとする。（関心・意欲・態度）

・同じ位置関係の条件を与えても違いが出ることについて，2 次関数などの既習事項と結びつけて，図形的な考察や数式的な推論を通して考察することができる。（数学的な見方や考え方）

（3）展開

時間	ねらい	学習内容・学習活動 ○質問・発問・指示　S 予想される生徒の反応 ・学習活動	指導上の留意事項 ・留意点　T 教員の手立て ◇評価規準（評価方法）
導入 3 分	前時までの授業を振り返り，新たに得た疑問を確認する	○〈課題①提示〉 前回の授業まで, 三角形の辺の長さと角度の大きさを求めてきたが, ただ 1 つに定まる三角形と 2 つの候補が考えられる三角形とがあった。その違いは何か。これまで学んできた知識をもとに考察してみよう。	・振り返りやすいように，前時に扱った問題を板書しておく。 （教科書 P.150，151）
展開 I 12 分	1 つに定まる三角形と 2 つの候補が考えられる三角形との違いを考察する	・〈課題①自力解決〉 ・〈課題①集団検討〉 S1： 三角形の合同（決定）条件に合うものは必ず 1 つに定まっている。合同条件を満たしていない条件のときに 2 つ候補が出てくるのではないか。 S2：2 辺と夾角では 1 つに定まるが，夾角でない角では 2 つの候補が出る。 S3：1 つに定まる三角形は a と A，b と B，c と C のどのペアからも 1 つずつわかっている。 S4：1 つに定まる三角形は余弦定理がシンプルな形（a^2=…で求められるもの），2 つの候補が考えられる三角形は余弦定理が（1 次の項を持つ 2 次方程式になる）シンプルではない形のものではないか。	・自力解決の時間は 4 分とする。 ・集団検討の時間は 3 分とする。 T1：いいところに気づいたね。では，合同条件を満たしていなければ必ず 2 つ候補が出てくるのかな。余弦定理で扱った問題を思い出してみよう。 T2：いいところに気づいたね。これまで算数や数学で学んだ知識と結び付けてもう少し一般化してみよう。 T3：（実際に他クラスで出てきた意見）それを図に表してみよう。これまでの算数や数学で学んだ知識と結びつくかもしれないよ。 T4：いいところに気づいたね。この後の考察で重要な鍵を握るアイデアだからぜひ近くの人とシェアしておこう。

		S5：わからない（無回答）	T5：本当に何も感じないかな。教科書の例題の図や途中計算を注意深く見直してみよう。 ◇三角形の決定問題において, 1つに定まる三角形と 2 つの候補が考えられる三角形との違いについて, 関心を持って解決しようとする。　（関心・意欲・態度）
		・〈課題①クラス内での共有〉 S3→S2→S1 の順に（そのように考えた生徒がいれば）発表する。	・なるべく多くの班を回り, シートに書いていなくても疑問をつぶやいている生徒がいないか観察する。
		○（S1 の意見がどこからも出てこない場合は, ）S2 までの意見をもとに再度集団検討の時間をとるので, もう少し一般化できないか考えてみよう。	・似たような表現でも, 考察の深さは全く同じというわけではない。生徒自身の言葉で最後まで話しきるように聴く姿勢を意識する。
		○三角形の合同条件を満たしていれば 1 つに定まることがわかった。では, 合同条件を満たしていなければ必ず 2 つの候補が出てきただろうか。これまでの余弦定理を用いた問題を振り返ってみよう。合同条件を満たしていなくてもただ 1 つに定まった事例を思い出したら教えてください。 S1：教科書 P.148 練習 22（2 辺と夾角でない 1 角が与えられた三角形の残り 1 辺の長さを求める問題）は合同条件を満たしていないのに, （2 次方程式が不適な負の解を持つため）ただ 1 つに定まっている。	・集団検討延長戦は 2 分とする。
		・S1 の意見を発表する。 ・ここまで出た考察を（必要であれば）集団で話し合い, クラス全体で共有する。	・S1 の考えを持つ生徒が 1 人でも出ればそこで発表してもらう。

展開 II 30 分	同じ位置関係の条件を与えても決定に違いが出ることについて，数式的に考察する	○〈課題②提示〉 三角形の合同条件を満たしていない場合でも必ず 2 つの候補が考えられるわけではないということがわかった。△ABC において同じ位置関係の条件（2 辺と夾角でない角：例えば b, c, B）を与えてもこのような違いが出る理由について謎を解明していきたい。あらためて，P.148 例題 11 と練習 22 を比較してどこに違いが出てくるのかを考察してみよう。 ・〈課題②自力解決〉 ・〈課題②集団検討〉 S1：余弦定理を a の 2 次方程式とみたときに，これが 2 つの正の解を持つときが 2 つの候補が考えられる場合, 正の解と負の解を持つときが 1 つに定まる場合だと思う。 S2：2 次方程式の解の個数が三角形の候補の個数に対応しそうだ。 S3：a の 2 次方程式が実数解を持つので，a について整理した判別式 D の符号で解の個数が変化するのではないか。 ・S1 の意見を持つ生徒が現れた段階で発表し，クラス全体で共有する。 ○今の意見をもとに，2 つの候補が考えられるような b，c，B の条件を数式的に考察してみよう。 S4：a の 2 次方程式が 2 つの正の解を持つと 2 つの候補が考えられるから， （ⅰ）判別式 D >0 （ⅱ）$f(x)>0$ （ⅲ）（軸）>0 が成り立つときを考えよう。 S5：a の 2 次方程式が 2 つの正の解を持つと 2 つの候補が考えられるよ。以前やった解の配置の考え方が使えないかな。	・自力解決の時間は 4 分とする。ここでは，なるべく口出しせずに思いっきり考えさせたい。 ・以下，a の 2 次方程式とは余弦定理を a について整理した $a^2-2c\cos B\,a+c^2-b^2=0$ を指すものとする。 ◇すべての班の様子を観察する。 ・集団検討に入った後でも自分で解き進められている生徒は自力解決を続けさせる。 ・なるべくここに時間をかけたい。 T4：いいところに気づいたね。実際にその条件を求めてみよう。 ・以下， $f(x)=a^2-2c\cos B\,a+c^2-b^2$ とする。 T5：いいところに気づいたね。どのような条件を挙げれば 2 つの正の解に制限できたか考察してみよう。

		S6：a の 2 次方程式が 2 つの正の解を持つと 2 つの候補が考えられるよ。 S7：a の 2 次方程式が実数解を持つので，判別式 D>0 だと 2 つの候補が考えられると思う。 S8：わからない（無回答） ・S1 の意見を持つ生徒が発表する。 ・〈課題②集団検討（延長戦）〉 S9：S4 で挙げた 3 条件を解いて整理すると， $\mathrm{b}-\mathrm{c}\sin B>0$，$c>b$，$2c\cos B>0$ が成り立つ。これの共通部分を考えよう。 以前証明した $\sin B \leq \frac{b}{c}$ が活用できそう。 S10：S4 の（ i ）を $c^2\cos^2 B-c^2+b^2>0$ まで変形した。 S11：S4 の（ ii ）を $c^2-b^2>0$ まで変形した。 S12：S4 の（ iii ）を $c\cos B>0$ まで変形した。 ・S9～S12 で出てきた意見をそのつど発表もしくは板書し，クラス全体で共有する。	T6：いいところに気づいたね。以前学んだ内容で活かせることがないか思い出してみよう。 T7：練習 22 も実数解は 2 個だったはずだけど，三角形は一意に定まったよ。もう少し注意深く考察してみよう。 T8：他の班の様子を見に行くと，何かきっかけがもらえるかもしれないよ。 ◇同じ位置関係の条件を与えても違いが出ることについて，2 次関数などの既習事項と結びつけて，図形的な考察や数式的な推論を通して考察することができる。　（数学的な見方や考え方） ・1 グループでも S4 の考察が（途中まででも）出てくれれば本単元および単元『2 次関数』の解の配置問題のねらいは達成できたといえるのではないかと考える。 T10：もう少し式変形を工夫すると，これまでに学んだことが活かせる形になりそうだよ。
まとめ 5 分	今日の内容を振り返る	〈本時のまとめ〉 ・振り返りシートを記入する。	・共有が図れた箇所以降を引き続き考察するように指示する。